

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа №25 г. Пензы им. В. П. Квышко»

**Квадратичная функция : от элементарного к параметрам**

Выполнила:

Гагарина Наталья Евгеньевна,

МБОУ СОШ №25 г. Пензы

им. В. П. Квышко, 11А класс

Руководитель:

Обухова Татьяна Алексеевна,

учитель МБОУ СОШ №25 г. Пензы

им. В. П. Квышко

Пенза, 2018

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc533492021)

[ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ. 4](#_Toc533492022)

[ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ. 6](#_Toc533492023)

[2.1. Непосредственное применение теории к решению задач. 6](#_Toc533492024)

[2.2. График квадратичной функции 8](#_Toc533492025)

[2.3.Графики квадратичных функций, содержащих модули. 8](#_Toc533492026)

[2.4.Квадратичная и показательная функции. 10](#_Toc533492027)

[2.5. Квадратичная и логарифмическая функция. 12](#_Toc533492028)

[2.6.Квадратичная функция и некоторые элементы тригонометрии. 13](#_Toc533492029)

[2.7.Квадратный трёхчлен с параметром. 14](#_Toc533492030)

[Заключение 18](#_Toc533492031)

[Список литературы: 20](#_Toc533492032)

# ВВЕДЕНИЕ

Школьный курс математики построен так, что квадратичную функцию мы изучаем на протяжении ряда лет на уроках алгебры и в старших классах на уроках алгебры и начал анализа. Наши знания по математике год от года углубляются и расширяются, что наглядно можно проследить на примере изучения свойств, графика и применения квадратичной функции. Математику нельзя рассматривать только как свод прикладных сведений. Это – полигон, на котором постигаются законы мышления, на котором идет освоение образа жизни современного человека. Учитывая, что при обучении алгебры закладываются основы решения уравнений первой и второй степени и основные графики: прямые, параболы, гиперболы, то важными становятся практическая направленность при решении задач

**Актуальность** работы обусловлена тем, что в задачах Государственной итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ), в олимпиадных задачах большое место отводится на тему «Квадратичная функция».

**Целью** работы  является обзор приложений квадратичной функции к решению различных задач школьного курса математики, олимпиадных задач и задач ГИА.

Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

- подбор задачи и примеров по данной теме;

- выделение типовых задач в каждом разделе и составление решения к ним;

- построение и чтение графика квадратичной функции;

 - решение уравнений и их систем;

-решение квадратных уравнений с параметрами, в том числе, поиск параметра в зависимости от свойств корней уравнения.

**Объект исследования**: квадратичная функция и ее график.

**Предмет исследования**: задачи разного спектра, при решении которых используются свойства квадратичной функции.

**Методы исследования**: поиск, анализ и синтез различных источников информации: статей, книг, интернет-ресурсов, самостоятельное решение задач.

Свой доклад я начну с краткого изложения теории и непосредственного применения. Основная же часть работы будет посвящена решению задач, содержание которых отличается от тех, которые рассматриваются на уроках, решения таких задач нестандартны. Свойства квадратичной функции, как правило, хорошо иллюстрируют соответствующие графики, многие рисунки помогают решить упражнения.

Особое внимание уделено рассмотрению внутрипредметных связей: это связь квадратичной функции с показательной, степенной, логарифмической, тригонометрическими функциями, применением свойств квадратичной функции для решения уравнений с параметром.

# ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ.

Функция вида *f(x)=ax2+bx+c* (1), где *а0 , b* и *с* – постоянные, *аR*, называется квадратичной функцией.(2)

На основании равенства (2) легко выводится следующее утверждение:

Утверждение1.2 Квадратичная функция при:

а) *а>0* имеет глобальный минимум при 

б) *а<0* имеет глобальный максимум при 

Ясно, что в каждом из двух случаев соответствующий экстремум является единственным и совпадает с наибольшим или наименьшим значением функции на R.

Утверждение 1.2. можно толковать и в связи с графиком квадратичной функции: точка  - вершина параболы при a>0 является самой нижней точкой графика функции, а при а<0 – самой верхней точкой графика.[[1]](#footnote-1)

Утверждение 1.3. Квадратичная функция при

a) *а>0* убывает на промежутке D1= и возрастает на промежутке D2=

б) *а<0* возрастает на промежутке D1 и убывает на промежутке D2.

Доказательство: а) *а>0.*

Пусть *х1<x2< - *

Рассмотрим*f(x2)-f(x1)=a+bx2+c-==(x2-x1)(a(x2+x1)+b)<(x2-x1)(a(-=0*

Откуда *f(x2)-f(x1)<0  f(x1)>f(x2).*

Т.е. функция на интервале *D1* при *а>0* убывает.

Аналогичным образом рассматриваем и остальные случаи.

Утверждение1.4 График квадратичной функции *f(x)=ax2+bx+c* симметричен относительно прямой g0, которая проходит через точку *А(-;0)* и параллельна оси ординат ( или совпадает с ней).

Обозначим D=b2-4ac дискриминантом квадратичной функции (дискриминантом квадратного уравнения ах2+bx+c=0).

Тогда: при а>0 возможны случаи:

а) при D>0 и х1<x2  f(x)=0 для значений х1 и х2

f(x)>0 для каждого x

f(x)<0 для каждого х.

б) при D=0 функция принимает значение, равное о, только для значений переменной х1=х2=-, f(x)>0 для любого х.

в) при D<0 f(x)>0 для каждого значения переменной.

Аналогично, если а<0, то

а) при D>0 и х1<x2  f(x)=0 для значений х1 и х2.

f(x)<0 для каждого х

f(x)>0 для каждого х

б) при D=0 f(x)=0 только для значений х1=х2= для любого

х.

в) при D<0 f(x)<0 для каждого значения переменной .

Можно особо отметить, что если D<0, то для каждого значения переменной знак значения функции совпадает со знаком коэффициента *а.*

Для определённой полноты теории и для некоторых её приложений нужно напомнить о справедливости утверждений, обратных уже рассмотренным.

Задача 1.1. Найти множество М значений квадратичной функции

*у=ах2+bx+c.*

Решение. Каждому действительному значению переменной *х* соответствует точно одно действительное значение переменной у. Это означает, что для каждого значения *х0* переменной *х* в уравнении *ах2+bx+c=у* существует точно одно значение у ( это *у0=f(x0)* ), которое ему удовлетворяет. А получаем ли для каждого *у* хотя бы одно действительное *х* ? Да. Это условие выполняется тогда и только тогда. Когда дискриминант уравнения *ах2+bх+с=у* является неотрицательным, т.е. *b2-4a(c-y*)0. Отсюда

*ау* 

Если *а>0*, то *у* ,

Если *а<0*, то *у*.

Следовательно, при а>0 множеством М значений функции является промежуток ;+, а при а<0 – промежуток .

Задача 1.2. Найди множество G значений функции



Обозначим f(x)=y и будем рассуждать, как в предыдущей задаче.



*20 х2+10 х+3=у(3х2+2х+1)*

*х2(20 – 3у)+х((10-2у)+(3-у)=0*

*D=(10-2у)2-4(3-у)(20-3у)=-8у2+76у-140*

*D -8y2+76y-140*

*, т.е. G=[]*

Задача1.3. Найти:

а) наименьшее значение функции  и соответствующее значение переменной *х.*

б) наибольшее значение функции f(x)= и соответствующее значение переменной х.

Рассуждая, как в задаче 1.1. непосредственно устанавливаем, что



Как приложение полученных результатов можно доказать, что уравнение

 не имеет решения.

# ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.

**2.1. Непосредственное применение теории к решению задач.**

На основе предложенной теории можно решить несколько задач.

Задача2.1. Найти значения действительного параметра k, при которых

функция  принимает

положительное значение при любых значениях переменной.

Решение. Если k=-5.то функция имеет вид f(x)=8x-14, т.е. является линейной. В этом случае она принимает положительное значение только при х>. Это показывает, что k=-5, не является решением задачи. Если k, то рассматриваемая функция является квадратичной. В этом случае она принимает положительное значение для каждого и только такого значения параметра, для которого одновременно коэффициент перед х2 – положительное число, а дискриминант квадратичной функции - отрицательное число, т.е. решим систему неравенств



Откуда k Ответ: k

Задача2.2. Найти наименьшее и наибольшее целые значения действительного k, параметра при которых функция f(x)=(k+2)x2+2kx+1 принимает положительное значение при любых значениях переменной.

Решение. Рассуждая, как в решении предыдущей задачи, получим, что искомыми значениями параметра являются числа 0 и 1. (Заметим , что k).

Задача 2.3. Найти наибольшее целое значение действительного параметра k, для которого функция *f(x)=-x2+2kx+k3-2k2-k-2* принимает отрицательное значение при всех значениях переменной.

Решение. Так как коэффициент перед второй степенью переменной отрицательный, то достаточно, чтобы дискриминант функции был отрицательным. Отсюда

*k3-k2-k-2<0*

*или (k-2)(k2+k+1)<0*

Но квадратичная функция  имеет положительный коэффициент перед второй степенью переменной *k*, а её дискриминант – отрицательное число. Это означает, что функция  принимает только положительные значения. Тогда *k-2<0,* откуда *k<2.* Это означает, что искомое наибольшее целое значение k – это 1. Ответ: k=1.

Задача 2.4. Найти значения действительного параметра *k*, при которых расстояние между вершиной параболы *f(x)=x2-4k2x+4k4+k2+1* и началом координат равно .

Решение. Вершиной параболы является точка  . В нашем случае координаты вершины *2k2* и *k2+1*. По формуле расстояния между двумя точками получаем биквадратное уравнение *5k4+2k2-7=0, откуда k=.*

Задача 2.5. Доказать. Что если m, g и t - длины сторон треугольника, то

парабола *f(x)=m2x2+(m2+g2-t2)x+g2* не пересекает ось абсцисс.

Решение: Т.к. m2>0, то чтобы доказать утверждение, достаточно установить, что дискриминант функции – отрицательное число. Находим:

*D=(m2+g2-t2)2-4m2g2=(m+g+t)(m-g+t)(m+g-t)(m-g-t).*

По условию существует треугольник, длины сторон *m+g+t>0, m-g+t>0, m+g-t>0, m-g-t<0.*которого равны m, g и t. Тогда

Это показывает, что D<0, т.е. парабола не пересекает оси абсцисс.

Задача 2.6. Доказать, что если действительные положительные числа m, g и t такие, что *m2g* и *m2+4g2=8t2*, то парабола *f(x)=x2-4x+m+2g* пересекает ось абсцисс.

Решение. Достаточно установить, что вершина параболы имеет отрицательную ординату (или что дискриминант положительный). Это эквивалентно неравенству 4t>m+2g. И так как обе части этого неравенства – положительные числа, достаточно доказать, что *2(8t2)>m2+4mg+4g2*. По условию *m2+4g2=8t2*, поэтому достаточно показать, что *(m-2g)2>0*. Однако это неравенство безусловно выполнено, так как по условию *m*.

## **2.2. График квадратичной функции**

Графиком квадратичной функции *f(x)=ax2+bx+c, xR* является парабола, которая обладает симметрией относительно прямой t, проходящей через точку А1(-и параллельной оси ординат.

Всем хорошо известен алгоритм построения графика квадратичной функции.

Задача 3.2. Построить график каждой из функций:

а) f(x)= ; б) f(x)=;

в) f(x)=

Решение. а) Для каждого х1функция принимает вид *f(x)=x2-4x-5*. Другими словами эту задачу сводим к задаче 3.1.

Ответ:

а) График функции- это парабола, изображённая на рис.1 без точки А этой параболы.

б) График – это та же парабола без её вершины V.

в) График – это та же парабола без её точек B и M.

Задача 3.3. Найти значение действительного параметра k , для каждого из которых значение функции *f(x)= 4x2+3kx+k2-2k+8* , больше значения ункции *(x)=3x2-3kx-9k2+2k+13* при одних и тех же значениях переменной.

Решить эту задачу – значит найти значение параметра, такие , что неравенство f(x)>справедливо при всех значениях переменной. Это неравенство равносильно неравенству *х2+6kx+10k2-4k-5>0*. С другой стороны функция *(х)=х2+6kx+10k2-4k-5* должна принимать положительное значение при любых значениях переменной . И так как первый коэффициент её положительный, решением задачи являются те и только те значения параметра, для которых дискриминант функции отрицательный. Отсюда

*k2-4k-5>0*.Ответ:k.

**2.3.Графики квадратичных функций, содержащих модули.**

Рассмотрим задачи на построение графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля.

Задача4.1. Рассмотрим графики функций :

1. f(x)=x2-4-5

б) f(x)=

Решение . Каждая из этих функций чётная и поэтому достаточно построить часть графика рассматриваемой функции, например, при значении переменной из интервала  - затем построить точки, симметричные данным относительно оси ординат Функция тождественна функции в случае а), т.е. график её совпадает с графиком,

Задача 4.2. Построить графики функций :

а) f(x)=; б) f(x)=;

в) f(x)=;

г) f(x)=

Решение.

а) Строим график с помощью параболы, изображенной на рис. 1. Для этого ту её часть, которая выше оси абсцисс, сохраняем, а нижнюю часть отображаем симметрично относительно этой оси вверх – рис.3

б) Эта функция тождественно равна функции из а).

г) График можно построить с помощью параболы, изображенной на рис. 1. ( рис.4)

Задача 4.3. Построить график функции

f(x)=

Решение . Функция f(x) является чётной . Поэтому сначала строим часть её графика, которая отвечает неотрицательным значениям переменной . Затем используем симметричность графика относительно оси ординат –рисунок 5.

Задача 4.4. Построим график каждой из функций :

a) f(x)= ; б) f(x)=;

в) f(x)= .

Решение. а) f(x)=

График состоит из двух частей, парабол (рис.6) – первая из них до точки L(2;0), а вторая от точки L дальше (без точки U (5;18)).

б) f(x)=

График состоит из частей двух парабол ( рис. 7) – первая от точки Т(5;-18), без самой точки Т, вторая от точки U(5;18) дальше ,без самой точки U.

в) f(x)= 

График снова состоит из частей двух парабол (рис. 8) – одна из них до точки К(-1;0) и после точки U(5;18) без самой точки U, другая - от точки К до точки Т(5;-18) без самих точек К и Т ( в конечном счёте точка К принадлежит, а точки Т и U не принадлежат графику рассматриваемой функции).

Задача 4.5. Найти число действительных корней уравнения



( в зависимости от значений действительного параметра k).

Решение . Из рисунка 9 можно сделать вывод о том, что:

А) если k(-;-16), то уравнение имеет один корень,

Б) если k=-16, то уравнение имеет 2 корня,

В) если k(-16;-12), то уравнение имеет три корня,

Г) если k(12;+), то уравнение имеет один корень.

Задача 4.6. Найти все значения действительного параметра k, при которых уравнение x2-x-2-3=k имеет по крайней мере один действительный корень.

Решение. По рисунку 10 видим, что искомыми значениями параметра являются k[-9;+ ).

Задача4.10. Построить графики функций :

а) f(x)=

б) f(x)=

Решение.

а) f(x)= 

Части первой и второй парабол имеют общую точку F(0;5), а части второй и третьей - общую точку D() (рис.11)

б)

f(x)= 

График состоит из частей пяти парабол. Участки первых двух парабол имеют общую точку A(-2;-3), второй и третьей – общую точку k(-1;0), третьей и четвёртой – общую точку B(0;-1) и четвёртой и пятой – точку V(2;9) (рис.12)

Задача 4.11. В зависимости от изменения действительного параметра k найти число действительных корней уравнения:

/x2-5/-4/x/=k.

Решение. Из рисунка 26 ясно, что при k (-;-4) при k=-4 два корня; при k (-4;5) четыре корня; при k=5 три корня; при k (5;+) два корня.

Идею для построения графиков квадратичных функций можно продолжить в разных направлениях. Основные применения таких графиков – это графическое решение уравнений или неравенств, нахождение наибольшего (наименьшего значения функций); определение числа действительных корней данного уравнения в зависимости от изменения действительного параметра.

## **2.4.Квадратичная и показательная функции.**

Для решения некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции целесообразно в трёхчлене выделить полный квадрат.

Задача 6.1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

а) φ(и)=2\*94-36\*34+157.

б) φ(u)=3\*

в**)** φ(u)=-5\*

Решение:

а) φ(u)=откуда следует, что функция принимает наименьшее значение, равное –5 при u=2

б) аналогично, φ(u)=

φ(-1)=φ(5)=1 –наименьшее значение.

в) φ(u)= -5\*(2-1)2+88; φ(3)=8 – наибольшее значение.

Задача 6.2. Сравнить значения функции

f(x)=φ(x) с числом 1.

а) а=2; φ(x)=x2-x+1;

б) а=; φ(x)=-4x2+3x-1

в) а=; φ(x)=3x2-6x+4;

г) а=; φ(x)=-2x2+x-15.

Решение. Отметим, что каждая из четырёх данных квадратичных функций при любом значении переменной принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения, что можно показать выделением точного полного квадрата.

а) основание степени2>1, а выделив в трёхчлене φ(x) полный квадрат, получим

φ(x)=(x-)2+.

Тогда, использовав свойство степени с положительным основанием и действительным показателем и тот факт, что φ(x) принимает только положительные значения при всех значениях переменной, заключаем, что для каждого **x** верно неравенство 2x-x+1>1.

б) Для каждого **x** выполнено ()-4X+3x-1<1

в) Для любого **x** выполнено ()3X-6x+4<1.

г) Так как  и φ(x) = -2(x-)2-,

то по свойству степени с положительным основанием и действительным показателем для каждого x выполнено ()-2x+x-15>1.

Задача 6.4. Исследовать на монотонность и найти наибольшее или наименьшее значения (если такие существуют) каждой из следующих функций.

а) f(x)=()⎜X⎜X-4X-5.

б) f(x)= ()⎜X+1⎜(X-5).

Решение.

а) Так как , то по свойству степени с положительным основанием и действительным показателем функция убывает на (-;-2] и на [2; ) и возрастает на [-2;2]. Функция принимает наименьшее значение

f(-2)= и наибольшее значение f(2)=()9.

б) Так основание положительное, меньше 1, то по свойству степени с положительным основанием и действительным показателем ясно, что функция убывает на (-;-1] и на [2;+ ) и возрастает на [-1;2]. Следовательно, f(-1)=1 – наибольшее значение и f(2)=()9.

Задача 6.5. Существует ли хотя бы одно решение каждого из уравнений

а) ()x =-x2+2x-2; б) –2x+3= x2-2x+3.

Решение. а) На основании свойства показательной функции левая часть уравнения принимает положительное значение при любом значении переменной. Правая же часть принимает отрицательное значение при любом **x**. Следовательно, уравнение не имеет решений.

б) Устанавливаем, например, выделением квадрата, что правая часть уравнения принимает положительное значение при любом **x**. Левая отрицательна при любом **x**. Поэтому уравнение снова не имеет решений.

## **2.5. Квадратичная и логарифмическая функция.**

Задача 7.1. Найти наименование (наибольшее) значение функции

а) ϕ(и) = log22 и – 4log2 и – 5;

б) ϕ(и)= -log152и +2log;

в) y=log42(x2-4x-3)- log4(x2-4x-3)-2и +3;

Решение.

а) Область определения функции Д=(0;+).Если положим log2 и =x, то получим ϕ(и) = f(x) = x2-4x-5.Выделяя полный квадрат, находим, что при значении переменной x0=2 функция f(x) принимает наименьшее значение, равное – 9. В таком случае следует, что log2 и = 2, отсюда и = 4∈Д., т.е. ϕ(4) = -9 – наименьшее значение функции.

б) рассуждая аналогично, получим ϕ() = 4 – наибольшее значение функции.

в) Область определения Д = (-; 2-) v (2+; +).Пусть log4(x2-4x-3) = и., тогда данная функция принимает наименьшее значение y = - .

Задача 7.2. Доказать, что при любом значении переменной функция:

а) f(x) = log3(x2-x+2) положительна;

б) f(x) = log =  отрицательно.

Решение.

а) Область определения совпадает с множеством действительных чисел. Так как основание 3>1, то по свойству логарифмов достаточно показать, что x2-x+2>1 каждого x, т. е. x2-x+1>0. Но квадратичная функция ϕ(x) = x2-x+1 принимает только положительные значения. Это следует, например, из представления ϕ(x) = (x-)2 +

Задача 7.5. И следовать на монотонность, найти глобальный экстремум каждой из функции.

а) f(x)=log3(log9(x2-2x+10));

б) f(x)=log(log3(x2+2x+4));

Решение.

а) Область определения и изменения функции f(x) зависят от областей определения и изменения функции ϕ(x)=x2-2x+10 и ψ(x)= log9ϕ(x).

Каждая из этих двух функций определена для каждого значения переменной; убывает на Д1= (-;1] и возрастает на Д2 = [1;+). Следовательно, и функция f(x) убывает на Д1 и возрастает на Д2 . Значит, она имеет глобальный минимум f(1)=0.

В задачах б) рассматриваются остальные основные случаи для оснований двух логарифмов.

Задача 7.6. Существует ли, по крайней мере, одно решение каждого из уравнений: Решение: так как



то уравнение не имеет решений.

## **2.6.Квадратичная функция и некоторые элементы тригонометрии.**

Задача 8.1. Существуют ли действительные числа u и k, такие, что

а) sin u=9k2-6k+2 б) cos u=k2-2k+3 ?

Задача8.2. Найти глобальные экстремумы и соответствующие им значения переменной для каждой из функций:



Решение. а) Пусть sin 3u=x, тогда х[-1;1]. В таком случае можно считать, что эта задача связана с задачей 3.1., так как достаточно рассмотреть функцию  .

Из рисунка видно, что эта функция на этом промежутке убывает. Поэтому максимум и минимум соответственно равны 0 и –8. Соответствующие значения переменной получаем как решения тригонометрических уравнений sin3u=-1 и sin3u=1. Эти решения соответственно

u= и u=

б)-5 и –8 – максимум и минимум функции

u= и u=

г) Пусть /sin / = x, тогда xЄ **[0;1],** и получаем функцию **f(x) = -x2+2x +3, xЄ [0;1].** При помощи рисунка 3 находим, что функция имеет глобальный минимум 3, а глобальный максимум 4. Соответствующие значения переменной: и =k; k=£.

д) Положим sin **+** cos **=x** и получим функцию φ(и) = f(x) = x2-4x-5, xЄ [-].

Снова можем использовать параболу на рис. 2. Функция убывающая, её глобальный максимум 4-3, а глобальный минимум -4-3. Значения переменной получаем как решение тригонометрических уравнений.

sin**+**cos**=-** и sin**+**cos**=**

Они соответственно равны

**u=**П + 9Пк, к Є £и **u= **П + 9Пк, к ЄZ.

## **2.7**.**Квадратный трёхчлен с параметром.**

Как показывает практика, олимпиадные задачи по математике и задачи ЕГЭ ежегодно пополняют число задач, которые с полным правом можно отнести к задачам-шедеврам. Рассмотрим такую задачу[[2]](#footnote-2)

Задача 1. Указать все значения параметра **q,** при которых уравнение

sin2x+(q-2)2sinx+q(q-2)(q-3)=3

имеет на отрезке [0;2П] ровно три корня.

Принято выделять четыре основных подхода к изучению квадратного трёхчлена:

-метод выделения полного квадрата;

-нахождение корней квадратного трёхчлена с последующей работой с полученными корнями;

-использование теоремы Виета;

-использование графических представлений о квадратном трёхчлене.

Попытка исследовать квадратный трёхчлен “в лоб” оказывается тупиковой, решение уравнения относительно параметра в данной задаче не приводит к тоже успеху: уравнение

1. **t2=(q-2)2t+q(q-2)(q-3)=0,** где **t=sinx** и **1≤t≤1.**

Относительно параметра q является кубическим, и попытки его решения так же обречены на неудачу. Наиболее естественно выглядит привлечение теоремы Виета и графических представлений, что, как выясняется, и приводит к успеху.

Решение. Установим взаимосвязь между количеством и расположением корней квадратного уравнения (1) и количеством корней квадратного уравнения на отрезке [0; 2П]. Для этого следует обратиться к свойствам функции синус.

При изменении **x** от 0 до 2П переменная **t=sinx** принимает все значения из отрезка

[-1;1], причём значения 1 и -1 достигаются только при одном значении x (x= и x= соответственно), значение 0 принимается в трёх точках (x=0, x=П и x=2П), а каждое из остальных значений – в двух точках: x1 и x2.

Теперь можно выделить те случаи, когда исходное уравнение имеет ровно три корня на отрезке [0; 2П]. Для уравнения (1) могут представиться три возможности : оно не имеет корней, имеет один корень, имеет два (различных) корня. Рассмотрим эти три случая.

**Случай 1.** Если уравнение (1) не имеет решений, то не имеет решений и исходное уравнение.

**Случай 2.** Если уравнение (1) имеет единственный корень **t=t0**, то исходное уравнение имеет ровно три решения на отрезке [0;2П] тогда и только тогда, когда равно три корня на этом отрезке имеет уравнение **sinx=t0,** как отмечалось выше, это верно лишь при **t0 =0**.

Таким образом, в этом случае нас интересует те значения параметра **q**, при которых уравнение (1) имеет единственный корень, причём равный нулю.

**Случай 3.** Если уравнение (1) имеет два различных корня **t=t1** и **t=t2**, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

sinx=t1, sinx=t2 (2).

Следовательно, исходное уравнение на отрезке [0;2П] имеет ровно три решения тогда и только тогда, когда ровно три решения на указанном отрезке имеет полученная совокупность. Поскольку уравнение sinx=t на отрезке [0;2П] может не иметь решений или иметь одно, два или три решения на отрезке [0;2П] в следующих случаях.

**Случай 3.1.** Одно из уравнений совокупности имеет на отрезке [0;2П] три решения, а другое при этом решений не имеет, т.е. одно из чисел t1 или t2, а другое не принадлежит отрезку [-1;1] – множеству значений функции синус.

Таким образом, случай 3.1. приводит к отысканию таких значений параметра **q**, что уравнение (1) имеет два корня, один из которых равен нулю, а другой не принадлежит отрезку [-1;1].

**Случай 3.2.** Одно из уравнений совокупности на отрезке [0;2П] имеет одно решение, а другое - два решения. В соответствии с указанными ранее свойствами функции синус на отрезке [0;2П] эта ситуация имеет место тогда и только тогда, когда:

а) одно из чисел **t1**или **t2** равно -1, а другое принадлежит либо интервалу (-1;0), либо интервалу (0;1); б) одно из чисел **t1** или **t2** равно 1, а другое принадлежит либо интервалу (-1;0), либо интервалу (0;1).

Таким образом, случай 3.2. сводится к отысканию таких значений параметра **q**, что уравнение (1) имеет два корня, один из которых равен -1 или 1, а другой принадлежит интервалу (-1;0), или (0;1).

Поскольку все варианты различного числа решений квадратного уравнения (1) исчерпаны, можно констатировать, что исходная задача равносильна следующей.

Найти все значения параметра **q**, для которых уравнение **t2+(q-2)2t+q(q-2)(q-3)=0** имеет

-или единственный корень t=o (случай 2).

-или 2 корня, один из которых равен нулю, а другой не принадлежит отрезку [-1;1] (случай 3.1).

-или 2 корня, один из которых равен -1, а другой принадлежит одному из интервалов

(-1;0) и (0;1) (случай 3.2 а).

-или 2 корня, один из которых равен 1, а другой принадлежит одному из интервалов

(-1;0) и (0;1).

После полученной переформулировки перейдём к непосредственному нахождению искомых значений параметра **q**.

**Случай 2.** Как известно, квадратное уравнение имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю, и имеет корень 0, если свободный член равен 0.

В нашем случае уравнение (1) должно иметь число 0 своим единственным корнем, и поэтому выполняются равенства.

**D = (q-2)(q3-10q2+24q-8)+0; q(q-2)(q-3)=0**

Из второго равенства получаем, что **q1=0, q2=2** или **q3=3** и из этих значений только **q=2** удовлетворяет первому равенству.

Таким образом, мы получили одно значение **q=2** удовлетворяющее условию задачи.

**Случай 3.1.** Легко видеть, что уравнение (1) имеет корень **t=0** при **q1=0, q2=2, q3=3,** и поскольку значению **q=2** нами уже рассмотрено, то остаётся рассмотреть только два других значения. В этих двух случаях уравнение имеет вид соответственно,

**t2+4t=0, t2+t=0**

Первое из этих уравнений имеет ненулевой корень, не принадлежащий отрезку [-1;1], тогда как ненулевой корень не принадлежащий отрезку [-1;1], тогда как ненулевой корень второго уравнения принадлежит этому отрезку.

Таким образом мы получаем ещё одно решение задачи: **q=0**.

**Случай 3.2а.** Поскольку один из корней уравнения (1) должен быть равен -1, то, подставляя **t=-1** в уравнение (1), получим

1-(q-2)2+q(q-2)(q-3)=0,

(1-q+2)(1+q-2) +q(q-2)(q-3)=0,

(3-q)(q-1)+q(q-2)(q-3)=0,

(q-3)(1-q+q2-2q)=0,

(q-3)(q2-3q+1)=0.

Отсюда **q1=3, q2=, q3=.**

Осталось для каждого из них установить, соответствуют ли они рассматриваемому случаю 3.2а, т.е. будет ли второй корень уравнения (1) при соответствующих значениях **q** принадлежать одному из интервалов (-1;0) и (0;1). При **q=3** уравнение (1) принимает вид **t2+t=0**  и имеет корни **t1=0** и **t2=-1**, что не соответствует случаю 3.2.

При **q1=** и **q2=** непосредственная подстановка в уравнение (1) приводит к техническим осложнениям. Укажем два способа преодоления указанных технических трудностей, а точнее – две возможности их обхода.

1й способ. Оба числа **q1,2= ()** являются корнями уравнения **q2-3q=-1**. Поэтому для этих значений **q** свободный член уравнения (1) равен

**q(q-2)(q-3)=(q-2)(q2-3q)= 2-q.**

Поскольку при этих значениях **q** один из корней равен -1, то по теореме Виета второй корень равен **q-2** и принадлежит одному из интервалов (-1;0) и (0;1), если **-1<q-2<0** или **0<q-2<1,** т.е. **1<q<2** или **2<q<3.**

Легко видеть, что **<1, 2<<3** и , следовательно, условию задачи удовлетворяет только значение **q=.**

Заметим, что указанный приём, позволивший понизить степень свободного члена уравнения (1), полезно применять, если возникать необходимость понизить степень многочлена относительно корня некоторого алгебраического уравнения (степень которого ниже степени многочлена).

2й способ. Основан на идеях решения задач, связанных с расположением корней квадратного трёхчлена относительно заданных промежутков.

Мы должны выяснить, при каком из значений **q= ** квадратный трёхчлен **y=f(t),** стоящий в левой части уравнения (1) помимо корня **t1=-1** имеет корень **t2,** принадлежащий либо интервалу (-1;0) , либо интервалу (0;1)

Поскольку абсциссы tb вершины параболы является серединой отрезка [t1;t2], то t2 принадлежит одному из этих интервалов тогда и только тогда, когда tb Є (-1;0) и при этом tb ≠ -0,5.

По теореме Виета

**t1+t2= - (q-2)2, т.е.**

**tb= = - **

Если **q=,** то **tb =<-1.**

И поэтому значение **q=** не соответствует случаю 3.2а.

Если же **q=,** то **tb = - .** Легко показать, что в данном случае tb Є (-1;0) и tb≠ -0,5.

Таким образом, значение **q=** является решением задачи.

Итак, рассмотрение случая 3.2а завершено.

Случай 3.2б. Здесь требуется найти такие значения параметра **q**, при которых корень t1 уравнения (1) равен 1, а другой корень лежит в одном из интервалов (-1;0) и (0;1).

Однако таких значений параметра не существует: по теореме Виета t1+t2=-(q-2)2, так что t2=-(q-2)2-t1=-(q-2)2-1<-1 для любого **q.**

Объединяя ответы всех рассмотренных случаев, получаем ответ задачи.

Ответ: **q=0, q=2, q=.**

Решение данной задачи потребовало нетрадиционных рассуждений. Однако, каждое отдельное рассуждение достаточно просто, но отыскать всю их последовательность, найти ход, упрощающий решение, совсем нелегко.

# Заключение

Квадратичную функцию с полным правом можно назвать основной из функций, изучаемых в школьном курсе. Такое особое положение отражается и на содержании олимпиадных задач, заданий, встречающихся на экзаменах. В тоже время в школьном курсе рассматриваются лишь самые простые, непосредственные применения свойств квадратичной функции в стандартных ситуациях, таких как решение квадратных уравнений, неравенств, нахождение наибольшего и наименьшего значения и др. Эти задачи решаются, как правило, в один шаг и поэтому не дают учащимся возможности эффективно применять свои знания для решения задач более сложных, а иногда и совсем простых, сформулированных непривычным образом.

В данной работе рассмотрены упражнения и задачи, которые относятся к очень большой теме математики – “квадратный трёхчлен и квадратичная функция”. В своей работе мы рассмотрели приемы решения задач с параметрами части С ЕГЭ, решение которых сводится к исследованию свойств квадратного трехчлена.

Задачи с параметрами являются одними из наиболее трудных задач курса математики. Их решение представляет собой исследование функций, входящих в условие задачи, и последующее решение уравнений или неравенств с числовыми коэффициентами.  Анализ текстов ЕГЭ и различных пособий для подготовки к экзаменам показал, что спектр применения свойств и графиков квадратичной функции очень широк и грамотное владение данным материалом будет способствовать успешной сдаче экзаменов.

Вопросы, рассматриваемые в докладе, помогут учащимися овладеть изложенной темой и будут интересны как ученикам, так и учителям.

# Список литературы:

1. Гашков С. Б. Квадратный трехчлен в задачах. Электронное издание. М.: МЦНМО, 2016., 189 с
2. В.И.Голубев, А.М.Гольдман, Г.В.Дорофеев “Квадратных трёхчлен с параметром”, “Репетитор” (специальный выпуск). 1992г., НПО “Перспектива”.
3. Г.В.Дорофеев “Квадратных трёхчлен в задачах”. Львов, Квантор, 1999г.
4. К.Петров “Квадратичная функция и её применение”, М., Просвещение, 1995 г.
5. И.Ф.Шарыгин “Факультативный курс по математике”, Решение задач 10 кл., М., Просвещение, 1989г.
6. 7)Цыганов Ш. “Квадратный трехчлен и параметры”/ Математика- № 5, 1999
7. Чулков П.В. “Уравнения и неравенства в школьном курсе математики”, Москва. Педагогический университет “Первое сентября”, 2012

1. К.Петров “Квадратичная функция и её применение”, М., Просвещение, 1995 г. [↑](#footnote-ref-1)
2. Г.В.Дорофеев “Квадратных трёхчлен в задачах”. Львов, Квантор, 1999г [↑](#footnote-ref-2)